

Menduga Modulus Geser dengan Memanfaatkan Modulus Elastisitas

Contoh Uji Ukuran Pemakaian dan Bebas Cacat

Predicting Shear Modulus Using the Elasticity Modulus of Full-Scale and Small-Clear Wood Specimen

Indah Sulistyawati, Abdul Muhar Husin dan Surjono Surjokusumo

Abstract

To predict the elasticity modulus of wood, an assumption is made that all of deflection is due to the bending moment. Actually the total deflection of a beam made up of a bending and shear component. The composition of the bending deflection has EI as the bending stiffness factor and for the shear deflection has a GA as the shear stiffness factor, where E is the elasticity modulus, I is the moment of inertia, G is the shear modulus and A is the cross sectional area of a beam. The shear modulus of wood can be determined by using the true elasticity modulus of full-scale specimen test and the apparent elasticity modulus of small-clear specimen test of the beam with single load at mid-point for simply supported beam. From the comparison of them the shear modulus of wood can be obtained. The result of this research shown that the shear modulus of *Acacia mangium* is $1/17.45$ multiplies by the elasticity modulus.

Key words: shear modulus, modulus of elasticity, deflection, bending

Pendahuluan

Pada balok yang mengalami momen lentur dan gaya geser, defleksi yang terjadi adalah superposisi dari pengaruh keduanya, hal ini dinyatakan oleh Radeliffe (1953), dapat dituliskan sebagai

$$y = y_b + y_s \dots\dots\dots(1)$$

dimana : y = defleksi total
 y_b = defleksi akibat momen lentur
 y_s = defleksi akibat gaya geser

Pada balok di atas dua perletakan sederhana dan diberikan gaya terpusat di tengah bentang, maka momen lentur dan gaya geser serta defleksi yang terjadi pada balok dapat dilihat seperti pada Gambar 1. Komposisi defleksi akibat momen lentur mengandung EI sebagai faktor kekakuan lentur dan akibat gaya geser mengandung GA sebagai faktor kekakuan geser, dimana E adalah modulus elastisitas, I adalah momen inersia penampang, G adalah modulus geser dan A adalah luas penampang melintang balok.

Memang sulit untuk dapat menentukan modulus geser dari kayu. Salah satu acuan yang dapat digunakan untuk menentukan modulus geser kayu adalah dengan peraturan ASTM D 198-99 tentang *Standard Test Methods of Static Test of Lumber in Structural Sizes*. Untuk mendapatkan nilai modulus geser kayu, pada peraturan tersebut diperlukan faktor *Poisson* rasio sebesar 0.05 sampai dengan 0.5. Untuk memperoleh hasil yang lebih tepat tentunya dengan memasukkan

faktor *Poisson* rasio sesuai dengan material yang diuji. Belum banyak data atau hasil penelitian yang memperlihatkan besar faktor *Poisson* rasio untuk berbagai jenis kayu di Indonesia.

Dalam hal ini ingin dicoba untuk mengadakan pendugaan nilai dari modulus geser kayu dengan mengadakan pengujian di laboratorium. Sebelumnya akan dijabarkan terlebih dahulu dasar pemikiran berdasarkan ilmu mekanika teknik untuk mendapatkan nilai modulus geser.

Pada desain struktur balok seringkali perhitungan defleksi pada suatu titik tertentu diasumsikan hanya akibat momen lentur saja meskipun pada titik yang ditinjau mempunyai pengaruh lendutan dengan adanya gaya geser, sehingga persamaan defleksi tersebut dituliskan

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \dots\dots\dots(2)$$

Perhitungan defleksi akibat gaya geser pada balok dengan material dari kayu, sering diabaikan. Newlin dan Trayer (1924) menyatakan bahwa dengan mengabaikan pengaruh adanya gaya geser akan menghasilkan perhitungan besar defleksi yang kurang tepat, khususnya pada balok dengan rasio bentang terhadap tinggi balok adalah kecil, misalnya untuk balok dengan penampang I dan box yang relatif mempunyai tebal badan tipis (Biblis 1965).

Persamaan untuk defleksi akibat gaya geser pada kurva defleksi elastis dari balok pertama kali dibuat oleh Grashof (1878) dan dikembangkan oleh Rankine (1895) dalam Biblis (1965).

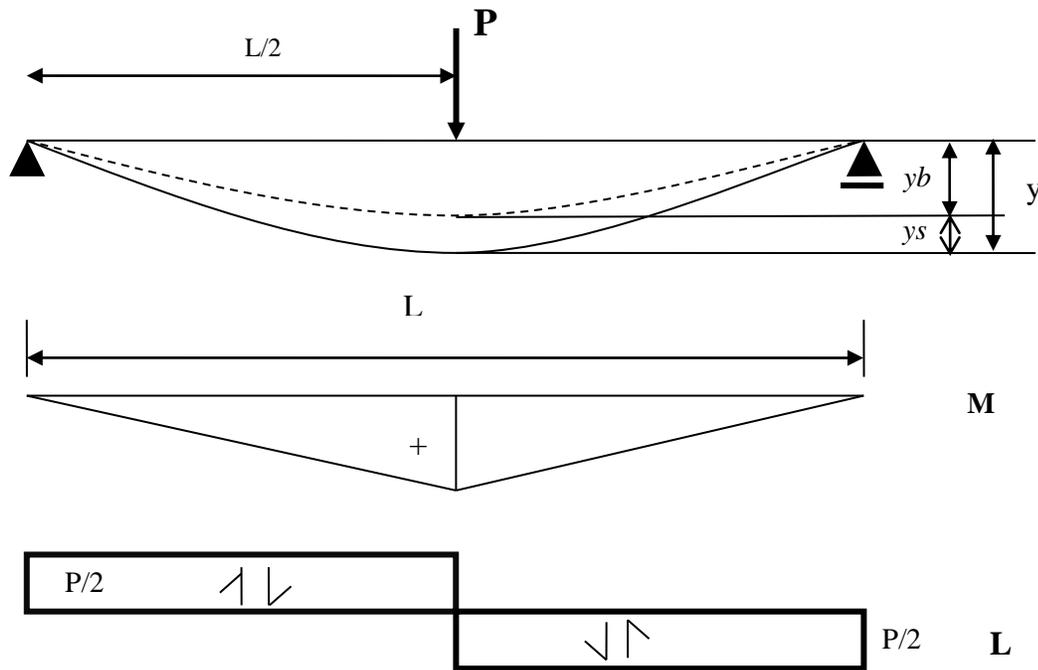


Figure 1. The total deflection due to bending moment and shear force with single load at mid-point for simply supported beam.

Kerangka Teori

Sebelum membicarakan masalah cara melakukan pendugaan untuk mendapatkan modulus geser dari kayu, terlebih dahulu dibahas persamaan defleksi akibat momen lentur atau akibat kombinasi momen lentur dan gaya geser. Analisa yang digunakan untuk memperoleh persamaan tersebut menggunakan konsep energi regangan. Konsep energi regangan didasarkan pada hubungan adanya penambahan energi yang terjadi akibat adanya deformasi. Energi regangan sama dengan kerja yang dilakukan akibat adanya beban yang diterapkan secara perlahan-lahan pada suatu komponen, hal ini dinyatakan oleh Timoshenko dan Gere (1961), Volterra dan Gaines (1971), Tauchert (1974), Timoshenko (1976), Oden dan Ripperger (1981), Beer dan Johnston (1992), Gere dan Timoshenko (1997).

Energi regangan untuk tegangan normal akibat momen lentur adalah

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV \dots\dots\dots(3)$$

Dengan menggunakan teori Castigliano maka besar defleksi pada suatu titik adalah

$$y_b = \frac{\partial U}{\partial X} \Big|_{x=0} = \int_0^L \frac{M}{EI} \Big|_{x=0} \frac{\partial M}{\partial X} dx = \int_0^L \frac{Mm dx}{EI} \dots\dots\dots(4)$$

dimana $M|_{x=0}$ adalah momen lentur akibat beban luar

dan dapat ditulis sebagai M, sedangkan $\frac{\partial M}{\partial X}$ adalah

momen lentur m akibat beban satu satuan pada titik yang defleksinya akan dicari. Defleksi akibat momen lentur saja untuk balok di atas dua perletakan sederhana dengan beban terpusat di tengah bentang didapat

$$y_b = \frac{PL^3}{48EI} \dots\dots\dots(5)$$

Energi regangan akibat adanya gaya geser adalah

$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV \dots\dots\dots(6)$$

dimana $\tau = \frac{VS}{bI} \dots\dots\dots(7)$

maka $U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \frac{V^2 S^2}{I^2 b^2 G} dA dx \dots\dots(8)$

dimana k merupakan faktor bentuk yang dapat dituliskan

$$k = \int_A \frac{S^2 A}{I^2 b^2} dA \dots\dots\dots(9)$$

sehingga persamaan 8 dapat dituliskan

$$U = \frac{k}{2} \int_0^L \frac{V^2}{GA} dx \dots\dots\dots(10)$$

Dengan menggunakan teori Castigliano maka besar defleksi pada suatu titik akibat gaya geser adalah

$$y_s = \frac{\partial U}{\partial X} \Big|_{X=0} = k \int_0^L \frac{V}{GA} \Big|_{X=0} \frac{\partial V}{\partial X} dx = k \int_0^L \frac{Vv dx}{GA} \dots\dots\dots(11)$$

dimana $V \Big|_{X=0}$ adalah gaya geser akibat beban luar

dan dapat ditulis sebagai V, sedangkan $\frac{\partial V}{\partial X}$ adalah

gaya geser v akibat beban satu satuan pada titik yang defleksinya akan dicari. Faktor k untuk penampang empat persegi panjang adalah 1.20, maka

$$y_s = 2(1.2) \int_0^{L/2} \frac{P(\frac{1}{2})}{2GA} dx = \frac{0.60 Px}{GA} \Big|_0^{L/2} = \frac{0.30 PL}{GA} \dots\dots\dots(12)$$

Tujuan dari penelitian ini adalah menduga nilai modulus geser kayu dengan memanfaatkan modulus elastisitas dari hasil pengujian dengan contoh uji ukuran pemakaian (*full scale specimen*) dan ukuran bebas cacat (*small clear specimen*).

Bahan dan Metode

Bahan/material yang digunakan pada penelitian ini adalah *Acacia mangium* yang ditebang dari area hutan di Parung Panjang Bogor. Kayu telah berumur 10 tahun 6 bulan dengan diameter log antara 26 cm sampai dengan 28 cm. Penebangan dilakukan empat bulan sebelum diadakan pengujian. Proses pengeringan dilakukan secara alamiah, yaitu kayu disusun diberi jarak antara diletakkan di bawah ruang beratap. Kadar air kayu pada saat pengujian adalah kondisi kering udara yaitu antara 14 sampai 16%.

Untuk menduga modulus geser kayu, terlebih dahulu diadakan pengujian di laboratorium untuk memperoleh nilai modulus elastisitas dari pengujian dengan menggunakan contoh uji ukuran pemakaian. Contoh uji ukuran pemakaian merupakan balok kayu dengan ukuran 5 cm x 5 cm x 260 cm diletakkan di atas dua perletakan sederhana dengan bentang sebesar 244 cm dan diberikan gaya terpusat di tengah bentang. Pembacaan besar defleksi di tengah bentang dilakukan pada setiap pertambahan beban. Selanjutnya dilakukan pengujian terhadap contoh uji bebas cacat, yaitu balok dengan ukuran 5 cm x 5 cm x 76 cm yang diletakkan di atas dua perletakan sederhana dengan bentang bersih 71 cm dan diberikan beban terpusat di tengah bentang. Balok contoh uji bebas cacat didapat dari contoh uji ukuran pemakaian. Pengujian contoh uji bebas cacat

sama dengan yang dilakukan pada contoh uji pemakaian. Masing-masing contoh uji berjumlah 10 (sepuluh) buah. Kedua pengujian dilakukan tidak sampai melampaui batas elastis. Untuk memperkirakan bahwa pengujian masih pada batas elastis dengan menentukan batas defleksi maksimum yang terjadi pada pengujian tidak melampaui dari 1/300 panjang bentang.

Dari hasil pengujian dapat digambar kurva hubungan gaya dan defleksi, kemudian diadakan analisa regresi untuk mendapatkan persamaan garis hubungan gaya dan defleksi serta digambarkan garis regresinya. Sudut kemiringan dari kurva digunakan untuk perhitungan modulus elastisitas kayu.

Menduga Modulus Geser

Defleksi di tengah bentang akibat beban terpusat di tengah bentang pada balok di atas dua perletakan sederhana yang mengalami momen lentur dan gaya geser seperti telah dijabarkan di atas, secara umum persamaannya dapat ditulis

$$y = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{0.30PL}{GA} \dots\dots\dots(13)$$

Untuk pengujian dengan contoh uji ukuran pemakaian dengan panjang bentang bersih L_{fs} dan beban terpusat P_{fs} seperti terlihat pada Gambar 2, besar defleksi ditengah bentang adalah

$$y = \frac{P_{fs} L_{fs}^3}{48E_{fs} I_{fs}} + \frac{0.30P_{fs} L_{fs}}{G_{fs} A_{fs}} \dots\dots\dots(14)$$

Besar defleksi pengaruh lintang dibanding dengan pengaruh momen adalah

$$\frac{0.3P_{fs} L_{fs}}{G_{fs} A_{fs}} \times \frac{48E_{fs} I_{fs}}{P_{fs} L_{fs}^3} = \frac{0.3}{G_{fs} b_{fs} h_{fs}} \times \frac{4E_{fs} b_{fs} h_{fs}^3}{L_{fs}^2} = 1.2 \frac{E_{fs}}{G_{fs}} \left(\frac{h_{fs}}{L_{fs}} \right)^2 \dots\dots\dots(15)$$

$$h_{fs} \ll L_{fs} \rightarrow \left(\frac{h_{fs}}{L_{fs}} \right)^2 \approx 0$$

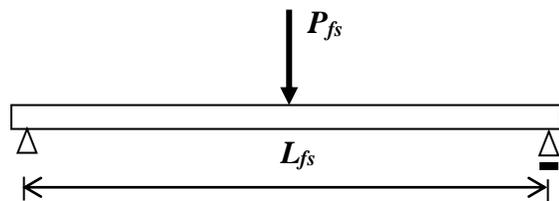


Figure 2. Full-scale specimen test

Oleh karena semakin besar bentang akan semakin kecil nilai pangkat duanya, maka pengaruh lintang pada contoh uji ukuran pemakaian mendekati nol. Untuk contoh uji ukuran pemakaian, defleksi akibat gaya geser dapat diabaikan sehingga persamaan defleksi dapat dituliskan

$$y_{fs} = \frac{P_{fs} L_{fs}^3}{48 E_{fs} I_{fs}} \dots\dots\dots(16)$$

dan besar modulus elastisitas dari contoh uji ukuran pemakaian dapat diperoleh

$$E_{fs} = \frac{P_{fs} L_{fs}^3}{48 y_{fs} I_{fs}} \dots\dots\dots(17)$$

E_{fs} merupakan modulus elastisitas yang benar ($=E_{benar}$) yang diperoleh dari contoh uji ukuran pemakaian.

Pada pengujian contoh uji bebas cacat dengan panjang bentang bersih adalah L_{sc} dan beban di tengah bentang P_{sc} . besar modulus elastisitas berdasarkan uji lentur pada perhitungan hampir selalu mengabaikan pengaruh defleksi akibat geser.

$$E_{sc} = \frac{P_{sc} L_{sc}^3}{48 y_{sc} I_{sc}} = E_{tidakbenar} \dots\dots\dots(18)$$

Pada pengujian dengan contoh uji bebas cacat bahwa perbandingan h/L adalah 1/14, apabila nilai tersebut dikuadratkan masih mempunyai nilai yang perlu dipertimbangkan untuk diperhitungkan. Oleh karena itu didalam mengadakan perhitungan defleksi pada pengujian contoh uji bebas cacat seharusnya juga memperhitungkan pengaruh gaya lintang selain momen, sehingga besar defleksi sebenarnya adalah

$$y_{sc} = \frac{P_{sc} L_{sc}^3}{48 E_{benar} I_{sc}} + \frac{0.3 P_{sc} L_{sc}}{GA} \dots\dots\dots(19)$$

atau

$$y_{sc} = \frac{P_{sc} L_{sc}^3}{48 E_{benar} I_{sc}} + \frac{0.3 P_{sc} L_{sc}}{GA} \frac{E_{benar}}{E_{benar}} \dots\dots\dots(20)$$

sehingga

$$E_{benar} = \frac{P_{sc} L_{sc}^3}{48 y_{sc} I_{sc}} + \frac{0.3 P_{sc} L_{sc}}{E_{benar} b_{sc} h_{sc} y_{sc}} \dots\dots\dots(21)$$

Persamaan 21 dapat dituliskan

$$E_{benar} = E_{tidakbenar} + \frac{0.3 P_{sc} L_{sc}}{E_{benar} b_{sc} h_{sc} \left(\frac{P_{sc} L_{sc}^3}{48 I_{sc} E_{tidakbenar}} \right)}$$

$$= E_{tidakbenar} \left(1 + \frac{1.20}{G} \left(\frac{h_{sc}^2}{L_{sc}^2} \right) \frac{E_{benar}}{E_{benar}} \right) \dots\dots\dots(22)$$

untuk penyederhanaan, diambil $a = \frac{G}{E_{benar}}$, maka

$$\frac{E_{benar}}{E_{tidakbenar}} = \left(1 + \frac{1.20}{a} \left(\frac{h_{sc}^2}{L_{sc}^2} \right) \right) \dots\dots\dots(23)$$

Telah diketahui untuk contoh uji bebas cacat perbandingan h/L adalah 1/14, maka persamaan 23 dapat ditulis

$$\frac{E_{benar}}{E_{tidakbenar}} = \left[1 + \frac{0.00612}{a} \right] \dots\dots\dots(24)$$

dimana E_{benar} merupakan modulus elastisitas pengujian dengan contoh uji ukuran pemakaian atau E_{fs} dan $E_{tidakbenar}$ merupakan modulus elastisitas pengujian dengan contoh uji ukuran bebas cacat atau E_{sc} .

Gambar 3 merupakan diagram E_{fs}/E_{sc} terhadap a, dimana nilai a merupakan perbandingan G terhadap E_{fs} . Dari nilai modulus elastisitas contoh uji ukuran pemakaian dan contoh uji bebas cacat akan diperoleh nilai modulus geser dari material kayu.

Hasil dan Pembahasan

Dari uraian persamaan di atas, terlihat bahwa rasio besar pengaruh defleksi akibat gaya lintang terhadap defleksi akibat momen lentur tergantung dari nilai kuadrat rasio tinggi balok terhadap panjang bentang. Semakin kecil nilai tersebut berarti semakin kecil pengaruh defleksi akibat gaya geser terhadap defleksi akibat momen lentur. Sehingga pengaruh defleksi akibat gaya geser dapat diabaikan. Untuk dapat memenuhi kriteria terhadap kekuatan maupun kekakuan pada struktur balok dengan material kayu biasanya mempunyai tinggi yang cukup besar. Penampang melintang balok tidak hanya segi empat tetapi juga tipe I, box atau bentuk lainnya. Sejalan dengan perkembangan didalam penyiapan material struktural yang terbuat dari kayu, dengan sistem laminasi dapat diperoleh dimensi sesuai keperluan dan tidak terhambat dari ukuran kayu pasaran yang mempunyai lebar dan tinggi yang terbatas. Salah satu tujuan sistem laminasi adalah untuk menambah lebar atau tinggi penampang. Dengan bertambah besarnya nilai kuadrat dari rasio tinggi terhadap panjang bentangnya, perlu dipertimbangkan untuk tidak mengabaikan besar defleksi akibat gaya geser.

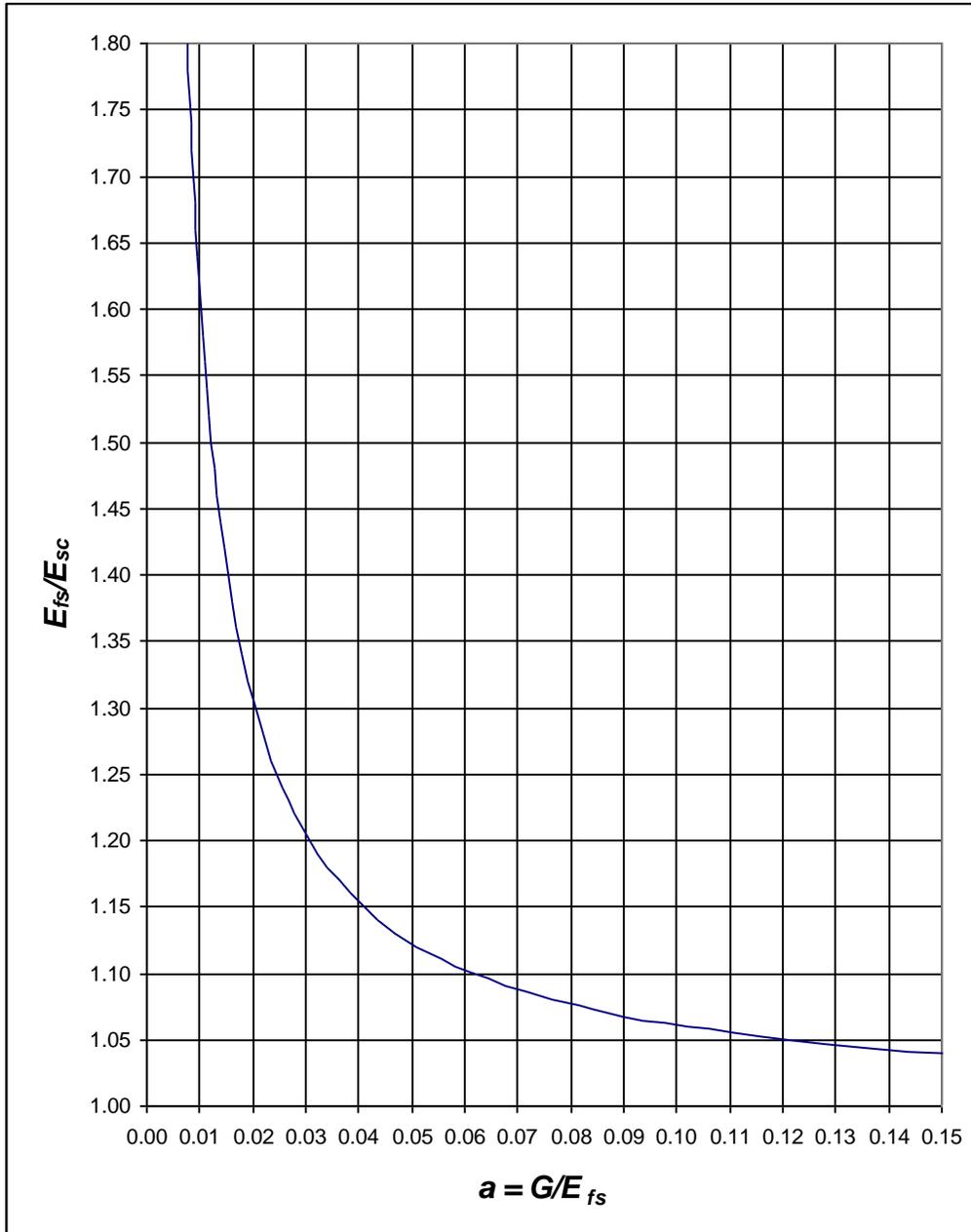


Figure 3. The relation curve of full scale to small clear modulus elasticity ratio and the “a” value

Table 1. The shear modulus to elasticity modulus ratio

Wood species	G_{LR}/E_L	G_{LT}/E_{LT}
Douglas Fir	0.064 (= 1/15.63)	0.078 (= 1/12.82)
Gum, Red	0.089 (= 1/11.24)	0.061 (= 1/16.39)
Poplar, Yellow	0.075 (= 1/13.33)	0.069 (= 1/14.49)
Spruce, Sitka	0.064 (= 1/15.63)	0.061 (= 1/16.39)

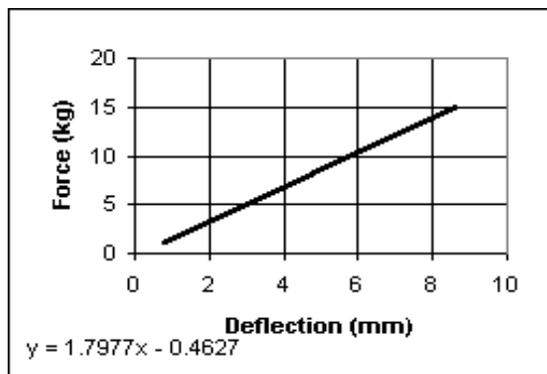
Source: “Elastic Properties of Wood,” For.Prod.Lab.Reports,1528 and 1528A-H, 1945-1946

Hal lain pada perhitungan defleksi untuk balok kayu agar tetap memperhitungkan pengaruh geser adalah pada material kayu mempunyai rasio modulus geser terhadap modulus elastisitas yang kecil.

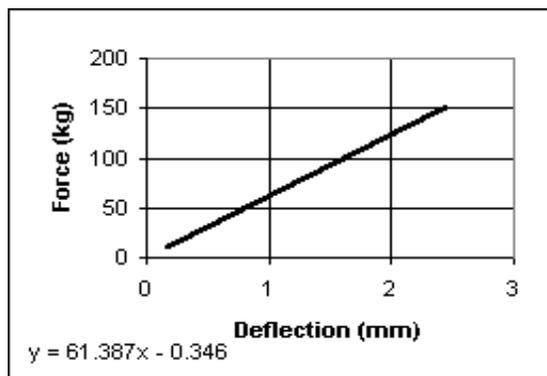
Sebagai gambaran pada Tabel 1 dapat dilihat rasio modulus geser terhadap modulus elastisitas beberapa jenis material kayu.

Modulus geser merupakan faktor pembagi dari besar defleksi akibat pengaruh adanya gaya geser. Dengan nilai pembagi kecil akan menghasilkan nilai defleksi yang lebih besar, sehingga dalam memperhitungkan defleksi pada balok dengan material kayu perlu memperhitungkan defleksi akibat gaya geser.

Dari hasil penelitian di laboratorium dengan menggunakan kayu jenis *Acacia mangium*, diperoleh nilai rataan hubungan gaya dan defleksi dari 10 (sepuluh) buah pengujian contoh uji ukuran pemakaian dan 10 (sepuluh) buah contoh uji ukuran bebas cacat seperti dapat dilihat pada Gambar 4.



(a)



(b)

Figure 4. The average value of the load and deflection curve

Note: (a) Full scale specimen
(b) Small clear specimen

Besar modulus elastisitas dari pengujian dengan contoh uji ukuran pemakaian adalah 1073 kg/mm² dan

besar modulus elastisitas contoh uji bebas cacat dengan mengabaikan adanya gaya geser adalah 969 kg/mm². Rasio modulus elastisitas dengan contoh uji ukuran pemakaian terhadap contoh uji bebas cacat adalah 1.107.

Grafik pada Gambar 3 menunjukkan bahwa nilai $a = G/E_{fs}$, dimana $a = G/E_{fs}$. Maka nilai G atau modulus geser kayu *Acacia mangium* adalah: $0.05730 \times E_{fs}$ atau $(1/17.542) \times E_{fs}$

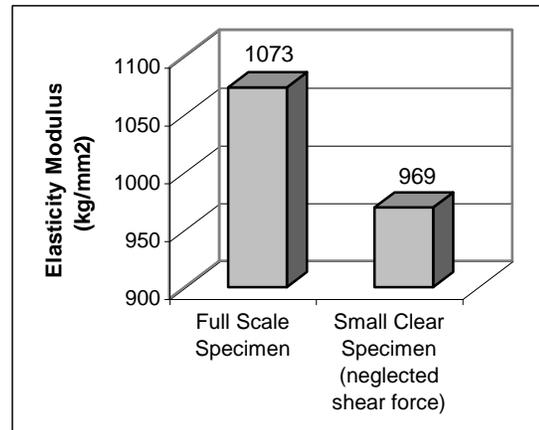


Figure 5. The elasticity modulus of full scale and small clear specimen

Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisa dan hasil penelitian dalam menduga besar modulus geser kayu *Acacia mangium* dapat disimpulkan bahwa: (1) perhitungan defleksi suatu titik dari balok yang mengalami momen dan gaya geser lendutan yang terjadi merupakan superposisi dari defleksi akibat momen lentur dan pengaruh gaya geser; (2) untuk balok tinggi dengan panjang bentang pendek atau nilai kuadrat dari rasio tinggi balok terhadap panjang bentang balok cukup besar, defleksi akibat gaya geser mempunyai nilai yang perlu diperhitungkan; (3) untuk balok dengan nilai kuadrat dari rasio tinggi balok terhadap panjang bentang balok adalah kecil, defleksi akibat gaya geser dapat diabaikan; (4) nilai modulus geser kayu dapat diperoleh secara mudah dengan cara mengadakan pengujian laboratorium untuk terlebih dahulu memperoleh besar modulus elastisitas dengan contoh uji pemakaian dan contoh uji bebas cacat; (5) dari perbandingan keduanya dan menggunakan grafik dapat diperoleh modulus geser kayu; (6) dengan memperhitungkan defleksi akibat gaya geser akan diperoleh modulus elastisitas dari contoh uji bebas cacat yang lebih besar dibandingkan apabila tidak memperhitungkan defleksi akibat gaya geser; (7) besar modulus elastisitas dari hasil pengujian dengan contoh uji pemakaian adalah 10% lebih besar dibandingkan

dengan modulus elastisitas dengan contoh uji bebas cacat, dimana pada perhitungan defleksi contoh uji bebas cacat masih mengabaikan pengaruh dari adanya gaya geser; (8) modulus geser kayu *Acacia mangium* adalah $1/17.45$ x modulus elastisitasnya.

Saran

Dari hasil analisa serta hasil penelitian yang telah dilakukan terhadap kayu jenis *Acacia mangium* ini disarankan untuk mengadakan penelitian untuk mendapatkan modulus geser pada beberapa jenis kayu yang ada di Indonesia, kemudian membandingkan nilai modulus geser dengan cara yang telah dibahas pada makalah ini dengan metoda pengujian yang telah diatur oleh beberapa peraturan yang berlaku. Saran ini memberi peluang bagi pemerhati atau peneliti kayu untuk dapat melanjutkan dan memperluas penelitian ini sehingga dapat menambah perbendaharaan pengetahuan atau data tentang sifat dasar kayu khususnya masalah modulus geser kayu.

Daftar Pustaka

Anonymous. Elastic Properties of Wood. 1945-1946. Forest Product Laboratory Reports, 1528 and 1528A-H.
ASTM D 198-99. Standard Test Methods of Static Test of Lumber in Structural Sizes.
Beer, F.P and E.R Johnston, Jr. 1992. Mechanics of Material, Second Edition. McGraw Hill Book Company England.

Diterima tanggal 10 Desember 2004

Indah Sulistyawati, Abdul Muhar Husin dan Surjono Surjokusumo
Jurusan Teknik Sipil, Fakultas Teknik Sipil dan Perencanaan Universitas Trisakti
(Dept. of Civil Engineering, Faculty of Civil Engineering and Planning, Trisakti University)
Jl. Kyai Tapa no 1 Grogol Jakarta Barat
Telp. 021-5663232 ext. 219, 220; Fax. 021-5663232 ext.209;
Hp. 08161316634 (Indah Sulistyawati)
Email : indswt1423@yahoo.com

Biblis, E.J. 1965. Shear Deflection of Wood Beams. Yale University, New Haven, Conn.
Gere, J.M. and S. Timoshenko. 1997. Mechanics of Material, Fourth Edition. PWS Publishing Company, a Division of International Thomson Publishing Inc.
Grashof, F. 1878. Elastizitat and Festigkeit 2d ed. Auflage der Festigkeitslehre, Berlin. Germany.
Newlin, J.A. and G.W.Trayer. 1924. Deflection of Beams with Special Reference to Shear Deformations. Nat.adv.Comm. Acron.Rep.180
Oden, J.T. and E.A. Ripperger. 1981. Mechanics of Elastic Structures. Second Edition. Hemisphere Publishing Corporation, Washington.
Radeliffe, B.M. 1953. Shear Deflection in Timber Beams and A Method for the Determination of Shear Moduli, Purdue University Agricultural Experiment Station Lafayette, Indiana.
Rankine, W.J.M. 1895. Applied Mechanics. 15th ed. Griffin and Co., London, England.
Tauchert, T.R. 1974. Energy Principles in Structural Mechanics. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd.
Timoshenko, S. and J.M. Gere. 1961. Theory of Elastic Stability, Second Edition. McGraw Hill Book Company, Kogakusha Tokyo.
Timoshenko, S. 1976. Strength of Materials. Robert E, Third Edition. Krieger Publishing Company Huntington, New York.
Volterra, E and J.H. Gaines. 1971. Advanced Strength of Materials. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.